FOLIA 290

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 11(2019)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.11.4

Antoni Chronowskii

Teoretyczne podstawy dzielenia z resztą liczb naturalnych wraz z uwagami o dzieleniu z resztą liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych*

Abstract. In this article, I analyze the theoretical foundations of the division with remainder in the arithmetic of natural numbers. As a result of this analysis I justify that the notation $a : b = c\ r\ s$, where a, b, c, s are natural numbers and r denotes *remainder*, is correct at school mathematics level and does not lead to a contrediction suggested by the author of the article (Semadeni, 1978). As a generalization of the division with remainder of natural numbers, I consider the division with remainder of integers, rational and real numbers.

1. Wstęp

Głównym celem tej pracy jest analiza teoretycznych podstaw dzielenia z resztą w arytmetyce liczb naturalnych. Rozważania teoretyczne uzupełnione są pewnymi uwagami dydaktycznymi bezpośrednio związanymi z teorią dzielenia z resztą i zwykłego dzielenia liczb naturalnych. Zagadnienia dzielenia z resztą i zwykłego dzielenia liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych ograniczone są do podstawowych definicji i twierdzeń związanych z tymi pojęciami.

Na wstępie przedstawimy krótkie informacje dotyczące tematyki dzielenia z resztą liczb naturalnych i całkowitych w wybranych podręcznikach szkolnych. Pierwsze trzy podręczniki nie są obecnie używane w szkole, ale uwzględniłem te podręczniki, aby uwydatnić w nich starania autorów, znanych dydaktyków, prowadzące do połączenia teorii dzielenia z resztą liczb naturalnych z propozycjami dydaktycznego opracowania tych tematów, co bezpośrednio wiąże się z tematyką tego artykułu.

*2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97B50; Secondary: 97C70
Keywords and phrases: division with remainder, division

W podręczniku (Turnau, Ciosek, Legutko, 1979) autorzy na przykładach wprowadzają pojęcie *dzielenia całkowitego*, np. $350 : 12 = 29$ (str. 58). Aby wyróżnić dzielenie całkowite zastosowany został kolor czerwony do zapisania symbolu : tego dzielenia. W tym podręczniku stosowany jest również zapis, którego przykładem jest $350 : 12 = 29$, $r = 2$ (czerwony kolor symbolu :, str. 59), przy czym napisano, że 29 to iloraz całkowity, natomiast 2 to reszta. Autorzy podręcznika (Nowecki, Klakla, 1997) stosują zapis dzielenia z resztą, którego przykładem jest $27 : 6 = 4\, r.\, 3$ (str. 27). Ci sami autorzy w kolejnym chronologicznie podręczniku (Nowecki, Klakla, 1999) stosują zapis, którego przykładem jest $13 : 6 \,\underset{\cdot}{=}\, 2\, r.\, 1$ (str. 26). Po tym zapisie zamieszczony jest komentarz: "Użyliśmy znaku $\underset{\cdot}{=}$ aby zaznaczyć, jaka w tym dzieleniu wystąpiła reszta".

Na podstawie powyższych przykładów wyra «nie widać, że autorzy tych podręczników starają się, poprzez zróżnicowaną symbolikę zapisu dzielenia z resztą, uwydatniać odmienność dzielenia z resztą liczb naturalnych od zwykłego dzielenia liczb. Ponadto zastosowana symbolika ma za zadanie podkreślenie istotnych cech dzielenia z resztą liczb naturalnych. Czy autorzy osiągnęli wymienione cele, pozostawiam czytelnikom do oceny.

Dalsze informacje o dzieleniu z resztą w programie szkolnym pochodzą z aktualnie używanych podręczników, tzn. podręczników wydanych po opublikowaniu tekstów podstaw programowych odpowiednio w roku 2017 (Zalewska, 2017) oraz w roku 2018 (Zalewska, 2018).

Autorzy podręcznika (Dubieniecka-Kruk, Piskorski, Gleirscher, Malicka, Pytlak., 2017) wprowadzają dzielenie z resztą liczb naturalnych (str. 93 - 94) na podstawie przykładu: 17 lizaków podzielono na zestawy po 3 lizaki. Otrzymano 5 zestawów po 3 lizaki i zostały jeszcze 2 lizaki (rysunek). Takie dzielenie nazywamy **dzieleniem z resztą** i zapisujemy w następujący sposób: $17 : 3 = 5$ reszta 2 lub $17 : 3 = 5\, r\, 2$.

Dalej autorzy podają następujące przykłady:
$7 : 3 = 2$ reszta 1, bo $2 \cdot 3 + 1 = 7$,
$8 : 3 = 2$ reszta 2, bo $2 \cdot 3 + 2 = 8$,
$9 : 3 = 3$ reszta 0, bo $3 \cdot 3 + 0 = 9$.

W podręczniku (Dobrowolska, Jucewicz, Karpiński, Zarzycki, 2019) po pewnym wprowadzeniu podane są przykłady dzielenia z resztą liczb naturalnych: $20 : 3 = 6$ reszta 2, $25 : 4 = 6$ reszta 1, $50 : 9 = 5$ reszta 5.

Następnie autorzy stwierdzają (str. 27):

Uwaga. Zamiast pisać $20 : 3 = 6$ reszta 2, możemy pisać krótko $20 : 3 = 6\, r\, 2$.

Potem autorzy piszą (str. 27):

Reszta jest zawsze mniejsza niż liczba, przez którą dzielimy. Równość $21 : 3 = 7$ można zapisać tak: $21 : 3 = 7$ reszta 0. Zamiast mówić, że reszta z dzielenia $21 : 3$ jest 0, mówimy, że liczba 27 dzieli się przez 3 bez reszty. Możemy też powiedzieć, że liczba 27 jest podzielna przez 3.

W podręczniku (Dobrowolska, Jucewicz, Karpiński, P., 2018) w paragrafie *Działania pisemne - dzielenie* są zamieszczone przykłady pisemnego dzielenia z resztą. W poniższych przykładach mamy postać zapisu dzielenia z resztą: $7539 : 8 = 942r3$ (str. 36); $28982 : 31 = 934\, r\, 28$ (str. 37).

W podręczniku (Babiański, Chańko, Wej, 2019) autorzy stwierdzają: Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy powiedzieć, że liczba 45 dzieli się przez 3 **bez reszty**. $5 : 3 = 15$ reszta 0. Dzieląc 47 przez 3 otrzymujemy 15 i resztę 2. $47 : 3 = 15$ reszta 2. Oznacza to, że liczbę 47 można przedstawić w postaci: $47 = 3 \cdot 15 + 2$ (str. 11).

Z podręcznika (Kurczab, E., Świda, 2019) pochodzi następujący tekst dotyczący dzielenia z resztą liczb naturalnych i całkowitych:

Twierdzenie 2 (str. 33).

Dla liczb naturalnych n i m, $m \neq 0$, istnieje tylko jedna para liczb naturalnych q i r, dla której $n = m \cdot q + r$, gdzie $r < m$.

Liczbę q z twierdzenia 2 nazywamy **ilorazem**, a liczbę r - **resztą**.

Twierdzenie 3. O dzieleniu z resztą (str. 35).

Dla liczb całkowitych a i b, $b \neq 0$, istnieje tylko jedna para liczb całkowitych q i r, dla której $a = b \cdot q + r$, gdzie $0 \leq r < |b|$.

Liczbę q z twierdzenia 3 nazywamy **ilorazem**, a liczbę r - **resztą**.

Przykład 13 (str 35).

$(-13) : 5 = -3\, r.\, 2$, bo $(-3) \cdot 5 + 2 = -13$ i $0 \leq 2 < 5$,

$13 : (-5) = -2\, r.\, 3$, bo $(-2) \cdot (-5) + 3 = 13$ i $0 \leq 3 < 5$.

Wielu autorów publikacji zabierało głos na temat dzielenia z resztą liczb (zob. np. Abramowicz, 1978; Chronowski, 1999; Krygowska, Siwek, 1976; Krygowska, 1977; Semadeni, 1978). Pragnę również zaprezentować moje obszerniejsze (niż w książce Chronowski, 1999) refleksje dotyczące dzielenia z resztą i zwykłego dzielenia liczb. Schemat moich rozumowań jest następujący:

a) najpierw przeprowadzona jest teoretyczna analiza pojęć zwykłego dzielenia i dzielenia z resztą w arytmetyce liczb naturalnych;

b) następnie na podstawie tej analizy proponowane są wnioski dotyczące dydaktycznych aspektów tych pojęć w arytmetyce liczb naturalnych;

c) w dalszej części artykułu podane są podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące zwykłego dzielenia i dzielenia z resztą w arytmetykach liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych.

2. Dzielenie i dzielenie z resztą w arytmetyce liczb naturalnych

Symbolami $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ oznaczamy odpowiednio zbiory: liczb naturalnych (z zerem), całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Przyjmujemy, że $\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \setminus \{0\}$.

1. *Dzielenie w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych.*

Niech $D = \{(a,b) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^* : \ \exists\, c \in \mathcal{N}(a = bc)\}$. *Dzielenie* w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych jest funkcją $d : \mathcal{N} \times \mathcal{N}^* \supset D \longrightarrow \mathcal{N}$ określoną następująco:

$$d((a,b)) = c \Longleftrightarrow a = bc \tag{1}$$

dla $(a,b) \in D$ i $c \in \mathcal{N}$.

Zapis tradycyjny:

$$a : b = c \Longleftrightarrow a = bc$$

dla $a, b, c \in \mathcal{N}$ i $b \neq 0$.

Zauważmy, że funkcja d jest dobrze określona. Istotnie, niech $(a,b) \in D$ i $c, c_1 \in \mathcal{N}$. Jeżeli $d((a,b)) = c$ i $d((a,b)) = c_1$, to $a = bc$ i $a = bc_1$. Z prawa skreśleń dla mnożenia liczb naturalnych (zob. Chronowski, 1999, cz. 1, str. 37) wynika, że $c = c_1$.

Dzielenie w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych nie jest działaniem, ale jest tzw. *działaniem częściowym* (lub *działaniem ograniczonym*).

2. *Dzielenie z resztą w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych.*

Dzielenie z resztą liczby naturalnej a przez niezerową liczbę naturalną b polega na znalezieniu liczb naturalnych c i s takich, że $a = bc + s$ i $0 \leq s < b$. Liczbę a nazywamy *dzielną*, b – *dzielnikiem*, c – *ilorazem całkowitym*, s – *resztą*.

Definicja dzielenia z resztą liczb naturalnych jest oparta na następującym twierdzeniu o dzieleniu z resztą:

Twierdzenie 2.1
(zob. Chronowski, 1999, cz. 1, str. 52) *Dla dowolnych liczb naturalnych a i b, przy czym $b \neq 0$, istnieje dokładnie jedna para liczb naturalnych c i s takich, że*

$$a = bc + s \text{ i } 0 \leq s < b.$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że *dzielenie z resztą* w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych jest funkcją $\delta : \mathcal{N} \times \mathcal{N}^* \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ określoną następująco:

$$\delta((a,b)) = (c,s) \Longleftrightarrow (a = bc + s \ \wedge \ 0 \leq s < b) \tag{2}$$

dla $(a,b) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^*$ i $(c,s) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Zauważmy, że dzielenie z resztą liczb naturalnych nie jest ani działaniem dwuargumentowym w zbiorze $\mathcal{N}$ (lub $\mathcal{N}^*$), ani nie jest działaniem jednoargumentowym (tzn. funkcją odwzorującą dany zbiór w ten sam zbiór), gdyż zbiory $\mathcal{N} \times \mathcal{N}^*$ i $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ są różne.

W wielu szkolnych podręcznikach do matematyki stosuje się tradycyjny zapis dzielenia z resztą w postaci:

$$a : b = c\, r\, s \tag{3}$$

dla $a, b, c, s \in \mathcal{N}$ i $b \neq 0$. Zapis (3) jest stosowany głównie dla konkretnych liczb naturalnych (tzn. liczb naturalnych zapisanych za pomocą cyfr układu dziesiątkowego), na przykład $17 : 5 = 3\, r\, 2$. W zapisie (3) rolę symbolu funkcji δ pełni dwukropek : (analogicznie do praktyki stosowanej dla działań algebraicznych), a para (c,s) jest zapisana w postaci $c\, r\, s$ – jest to symbol pośredni między wyrażeniem z języka naturalnego (r – reszta) i wyrażeniem z języka symbolicznego ((c,s) – para) (pomysł takiej interpretacji symbolu $c\, r\, s$ był również prezentowany przez Z. Krygowską (zob. Krygowska, Siwek, 1976; Krygowska, 1977). Ponieważ (3) jest zapisem funkcji, więc zwykły znak równości = jest poprawnie (na szkolnym etapie formalizacji języka matematycznego) zastosowany w tym wzorze.

3. *Wzajemne związki między dzieleniem i dzieleniem z resztą w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych.*

Rozważmy funkcje d i δ określone odpowiednio wzorami (1) i (2). Podamy interpretację teoretyczną funkcji dzielenia d i funkcji dzielenia z resztą δ oraz wyciągniemy pewne dydaktyczne wnioski wynikające z tych interpretacji.

(i) *Interpretacja pierwsza.*

Ponieważ $d \cap \delta = \emptyset$, więc dzielenie d i dzielenie z resztą δ w zbiorze $\mathcal{N}$ są zupełnie różnymi pojęciami. W tej interpretacji zwykłe dzielenie *nie* jest szczególnym przypadkiem dzielenia z resztą, nawet wtedy, gdy reszta jest równa 0.

Wnioski dydaktyczne:

(a) Rygorystyczne stosowanie powyższej interpretacji prowadzi do wniosku, że dzielenie z resztą w zbiorze $\mathcal{N}$ powinno być oznaczone innym symbolem (np. $\div$) niż dwukropek $:$, który jest tradycyjnym (w naszym obszarze kulturowym) symbolem zwykłego dzielenia. Na przykład autorzy podręcznika (Turnau, Ciosek, Legutko, 1979) zastosowali dwukropek w kolorze czerwonym, aby odróżnić dzielenie z resztą od zwykłego dzielenia. Natomiast autorzy podręcznika (Nowecki, Klakla, 1999) jeszcze bardziej skomplikowali zapis dzielenia z resztą stosując symbol $\underset{\cdot}{=}$.

(b) W tej interpretacji nie można utożsamiać dzielenia z resztą równą 0, ze zwykłym dzieleniem. Na przykład $6 \div 2 \neq 6 : 2$. Przyjmując dwa różne znaki dla dzielenia i dzielenia z resztą, komplikujemy proces nauczania o dzieleniu, który sam ze swej istoty jest trudny dla uczniów.

(ii) *Interpretacja druga.*

Przyjmujemy zasadę utożsamiania liczby naturalnej a z parą $(a, 0)$. Podobna zasada jest często stosowana w matematyce (na przykład utożsamia się liczbę rzeczywistą a z liczbą zespoloną $(a, 0)$). Konsekwencją przyjęcia powyższej zasady jest inkluzja $\mathcal{N} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Jeżeli we wzorze (2) przyjmiemy $s = 0$ i powyższą zasadę utożsamiania, czyli $(c, 0) = c$, to

$$\delta((a, b)) = c \Longleftrightarrow a = bc.$$

Zatem z określenia (1) funkcji d wynika, że $d \subset \delta$, czyli zwykłe dzielenie d w zbiorze $\mathcal{N}$ jest szczególnym przypadkiem dzielenia z resztą δ w zbiorze $\mathcal{N}$ (gdy reszta $s = 0$). Na przykład w podręcznikach (Nowecki, Klakla, 1997; str. 27) jest stwierdzenie: *Każde dzielenie jest dzieleniem z resztą.*

Wnioski dydaktyczne:

(a) Zwykłe dzielenie w zbiorze $\mathcal{N}$ jest szczególnym przypadkiem dzielenia z resztą w zbiorze $\mathcal{N}$. Zatem dzielenie z resztą i zwykłe dzielenie w zbiorze $\mathcal{N}$ mogą być oznaczane tym samym symbolem dwukropka $:$.

(b) Teoretycznemu utożsamianiu liczby naturalnej a z parą $(a, 0)$, odpowiada utożsamianie dzielenia z resztą równą 0, ze zwykłym dzieleniem w zbiorze $\mathcal{N}$. Zapis $a : b = c\, r\, s$ przechodzi w zapis $a : b = c$, gdy $s = 0$. Na przykład $6 : 2 = 3\, r\, 0$ zapisujemy jako $6 : 2 = 3$.

(c) W dyskusji dydaktycznej (Semadeni, 1978) związanej z zapisem dzielenia z resztą w postaci $a : b = c\, r\, s$, jako zasadniczy argument przeciw temu zapisowi, podnosi się zarzut, że prowadzi on do sprzeczności. Mianowicie, ponieważ

$$23 : 5 = 4\, r\, 3 \quad \text{i} \quad 31 : 7 = 4\, r\, 3, \tag{4}$$

więc korzystając z symetrii i przechodniości relacji równości mamy:

$$\frac{23}{5} = 23 : 5 = 31 : 7 = \frac{31}{7}. \tag{5}$$

Zdanie (5) jest fałszywe w arytmetyce liczb wymiernych.

Uzasadnimy, że wnioskowanie zawarte w podanym przykładzie, prowadzące do sprzeczności, nie jest formalnie poprawne, a jedynie oparte na pewnych błędnych skojarzeniach związanych z symboliką. Istotnie, niech $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q} \setminus \{0\}$. Dzielenie w zbiorze $\mathcal{Q}$ liczb wymiernych określamy jako funkcję $d^* : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}^* \longrightarrow \mathcal{Q}$ za pomocą następującego warunku:

$$d^*((a, b)) = c \Longleftrightarrow a = bc$$

dla $(a, b) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}^*$ i $c \in \mathcal{Q}$.

Aby z równości (4) otrzymać równości (5), należałoby funkcję δ (zob. (2)), określającą dzielenie z resztą w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych, uznać za funkcję dzielenia d^* w zbiorze $\mathcal{Q}$ liczb wymiernych zredukowaną do zbioru $\mathcal{N}$, a więc trzeba by przyjąć, że $\delta = d^*|_{\mathcal{N} \times \mathcal{N}^*}$, co jest założeniem błędnym. Zatem podany przykład nie jest dowodem na istnienie sprzeczności, gdyż jest oparty na błędnym wnioskowaniu. Wobec tego rozumowanie prowadzące do powyższej sprzeczności jest *sofizmatem*. Opisane błędne wnioskowanie jeszcze łatwiej zauważyć, gdy konsekwentnie zapiszemy rozumowanie przeprowadzone przez autora tej sprzeczności (czego autor nie zrobił), mianowicie

$$\frac{23}{5} = 23 : 5 = 4\, r\, 3 = 31 : 7 = \frac{31}{7}$$

Widzimy, że dzielenie z resztą zostało przeniesione do arytmetyki liczb wymiernych i zostały użyte ułamki w postaci liczb wymiernych, w dodatku nie będących liczbami naturalnymi.

Gdyby się zdarzyło, że uczeń zauważył możliwość pojawienia się sprzeczności typu (5), to można mu wytłumaczyć, iż popełnił błąd w swoim rozumowaniu, gdyż w trakcie porównywania stronami równości, zmienił w sposób niedopuszczalny znaczenie i sens symboli. Mianowicie, dzielenie z resztą liczb naturalnych, zamienił na dzielenie liczb wymiernych.

Dla dalszej ilustracji istoty rozważanego błędu podamy następujący przykład. Czy z prawdziwości równości $2 - 3 = -1$ i $5 - 6 = -1$ w zbiorze $\mathcal{Z}$ liczb całkowitych, wynika prawdziwa równość $2 - 3 = 5 - 6$ w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych? Nie, równość $2-3 = 5-6$ nie ma sensu w arytmetyce liczb naturalnych. W trakcie porównywania stronami podanych równości, został zmieniony sens symbolu odejmowania: odejmowanie liczb całkowitych zostało zastąpione odejmowaniem liczb naturalnych, a przecież są to dwa różne pojęcia (działania), chociaż używamy tych samych symboli odejmowania.

Aby uniknąć powyższych nieporozumień i wnioskowań prowadzących ucznia do pozornych sprzeczności, wynikających z zastosowania pewnych uproszczonych, nieformalnych zapisów, ale umotywowanych dydaktycznie, autorzy podręczników i nauczyciele powinni wyra«nie i zdecydowanie podkreślać, że dzielenie z resztą liczb określone jest w matematyce szkolnej *tylko* w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych (dokładniej: w arytmetyce liczb naturalnych) lub w zbiorze $\mathcal{Z}$ (o ile program, czy podręcznik zawiera dzielenie z resztą liczb całkowitych), natomiast ze zwykłym dzieleniem uczeń będzie spotykać się również w zbiorach $\mathcal{N}, \mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$. Przy takim rygorystycznym ograniczeniu definicji dzielenia z resztą do zbioru $\mathcal{N}$ (lub $\mathcal{Z}$), znikają powyższe problemy związane z zapisem $a : b = c\, r\, s$. W programie szkolnym mamy wiele pojęć, które występują tylko w arytmetyce liczb naturalnych (lub całkowitych), na przykład relacja podzielności $|$, NWD, NWW.

Zauważmy, że w miarę rozszerzania zbioru $\mathcal{N}$ do zbiorów $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ następuje *przedłużanie* funkcji dzielenia d na odpowiednie zbiory, a więc dzielenie w zbiorze $\mathcal{N}$ jest szczególnym przypadkiem (funkcją zredukowaną) dzieleń w zbiorach $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$. Natomiast z przedłużaniem funkcji dzielenia z resztą na zbiory $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{R}$ uczeń nie będzie się spotykać (być może z wyjątkiem zbioru $\mathcal{Z}$).

Na zakończenie rozważań o dzieleniu i dzieleniu z resztą liczb naturalnych, pozwolę sobie na wyrażenie mojego poglądu na temat przedstawionych wyżej problemów dydaktycznych:

(a) Zdecydowanie opowiadam się za stosowaniem w dydaktyce szkolnej drugiej interpretacji (zob. (ii)), w której zwykłe dzielenie w zbiorze $\mathcal{N}$ jest szczególnym przypadkiem dzielenia z resztą w zbiorze $\mathcal{N}$. W tym miejscu warto odwołać się do przykładów z życia codziennego, w których wykonuje się podziały zbiorów przedmiotów na równoliczne podzbiory (zwykle pozostaje pewna reszta, a czasem podział jest bez reszty).

(b) W tej interpretacji dzielenie z resztą oznaczałbym tradycyjnie dwukropkiem :, aby nie wprowadzać dodatkowych trudności dydaktycznych związanych z kłopotliwym rozróżnianiem zapisów dzielenia z resztą i zwykłego dzielenia. W arytmetykach liczb powszechnie stosuje się tę samą symbolikę dla różnych działań. Na przykład nie stosuje się różnych symboli dla dodawania w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych i dla dodawania w zbiorze $\mathcal{Z}$ liczb całkowitych.

(c) Zachowałbym w młodszych klasach (IV,V) tradycyjny zapis $a : b = c\, r\, s$ dzielenia z resztą tylko w przypadkach konkretnych liczb naturalnych (np. $7 : 3 = 2\, r\, 1$) z ustawicznym wyjaśnianiem, że $a : b = c\, r\, s$ oznacza $a = bc + s$ i $0 \leq s < b$ (oczywiście na konkretnych liczbach naturalnych). W tej symbolice przejście od zapisu $a : b = c\, r\, 0$ do zapisu $a : b = c$ jest wystarczająco naturalne.

3. Dzielenie i dzielenie z resztą w arytmetyce liczb całkowitych

Przyjmujemy, że $\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z} \setminus \{0\}$.

1. *Dzielenie w zbiorze $\mathcal{Z}$ liczb całkowitych.*

Niech $D = \{(a, b) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^* :\ \exists\, c \in \mathcal{Z}(a = bc)\}$. *Dzielenie* w zbiorze $\mathcal{Z}$ liczb całkowitych jest funkcją $d : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^* \supset D \longrightarrow \mathcal{Z}$ określoną następująco:

$$d((a, b)) = c \Longleftrightarrow a = bc$$

dla $(a, b) \in D$ i $c \in \mathcal{Z}$.

Zapis tradycyjny:

$$a : b = c \Longleftrightarrow a = bc$$

dla $a, b, c \in \mathcal{Z}$ i $b \neq 0$.

Podobnie jak dla dzielenia w zbiorze $\mathcal{N}$ liczb naturalnych, korzystając z prawa skreśleń dla mnożenia liczb całkowitych (zob. Chronowski, 1999, cz. 1, str. 101 - 102), można wykazać, że funkcja d jest dobrze określona.

Dzielenie w zbiorze $\mathcal{Z}$ liczb całkowitych nie jest działaniem, ale jest tzw. *działaniem częściowym* (lub *działaniem ograniczonym*).

Dzielenie z resztą w zbiorze $\mathcal{Z}$ liczb całkowitych.

Dzielenie z resztą liczby całkowitej a przez niezerową liczbę całkowitą b polega na znalezieniu liczb całkowitych c i s takich, że $a = bc + s$ i $0 \leq s < |b|$. Liczbę a nazywamy *dzielną*, b – *dzielnikiem*, c – *ilorazem całkowitym*, s – *resztą.*

Definicja dzielenia z resztą liczb całkowitych jest oparta na następującym twierdzeniu o dzieleniu z resztą:

Twierdzenie 3.1
(zob. Chronowski, 1999, cz.1, str. 108). *Dla dowolnych liczb całkowitych a i b, przy czym $b \neq 0$, istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych c i s takich, że*

$$a = bc + s \text{ i } 0 \leq s < |b|.$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że *dzielenie z resztą* w zbiorze $\mathcal{Z}$ liczb całkowitych jest funkcją $\delta : \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^* \longrightarrow \mathcal{Z} \times \mathcal{N}$ określoną następująco:

$$\delta((a, b)) = (c, s) \Longleftrightarrow (a = bc + s \ \wedge\ 0 \leq s < |b|) \tag{6}$$

dla $(a, b) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^*$ i $(c, s) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{N}$.

Zauważmy, że dzielenie z resztą liczb całkowitych nie jest ani działaniem dwuargumentowym w zbiorze $\mathcal{Z}$ (lub $\mathcal{Z}^*$), ani nie jest działaniem jednoargumentowym, gdyż zbiory $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^*$ i $\mathcal{Z} \times \mathcal{N}$ są różne.

Dla większości zamieszczonych wyżej uwag dydaktycznych dotyczących dzielenia z resztą i zwykłego dzielenia liczb naturalnych, można sformułować analogiczne uwagi dydaktyczne związane z teorią dzielenia z resztą i zwykłego dzielenia liczb całkowitych.

4. Dzielenie i dzielenie z resztą w arytmetykach liczb wymiernych i rzeczywistych

Niech $\mathcal{K} = \mathcal{Q}$ lub $\mathcal{K} = \mathcal{R}$. Przyjmujemy, że $\mathcal{K}^* = \mathcal{Q} \setminus \{0\}$ lub $\mathcal{K}^* = \mathcal{R} \setminus \{0\}$ oraz $K_0^+ = \{a \in \mathcal{Q} :\ a \geq 0\}$ lub $K_0^+ = \{a \in \mathcal{R} :\ a \geq 0\}$.

1. *Dzielenie w zbiorach liczb wymiernych i rzeczywistych.*

Dzielenie w zbiorze $\mathcal{K}$ liczb wymiernych lub rzeczywistych jest funkcją d : $\mathcal{K} \times \mathcal{K}^* \longrightarrow \mathcal{K}$ określoną następująco:

$$d((a, b)) = c \Longleftrightarrow a = bc$$

dla $(a, b) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}^*$ i $c \in \mathcal{K}$.

Zapis tradycyjny:

$$a : b = c \Longleftrightarrow a = bc \text{ lub } \frac{a}{b} = c \Longleftrightarrow a = bc$$

dla $a, b, c \in \mathcal{K}$ i $b \neq 0$. Zauważmy, że $a = bc \Longleftrightarrow c = ab^{-1}$ dla $a, b, c \in \mathcal{K}$ i $b \neq 0$.

Wobec tego

$$a : b = ab^{-1} \text{ i } \frac{a}{b} = ab^{-1}$$

dla $a, b, c \in \mathcal{K}$ i $b \neq 0$.

Z własności mnożenia w ciele $\mathcal{K}$ wynika, że funkcja d jest dobrze określona.

Dzielenie w zbiorze $\mathcal{K}$ liczb wymiernych lub rzeczywistych jest *działaniem częściowym* (lub *działaniem ograniczonym*). Dzielenie w zbiorze $\mathcal{K}^*$ niezerowych liczb wymiernych lub rzeczywistych jest *działaniem* w tym zbiorze.

2. *Dzielenie z resztą w zbiorach liczb wymiernych i rzeczywistych.*

Wzorując się na definicji dzielenia z resztą w zbiorze $\mathcal{Z}$ liczb całkowitych, można podać określenie dzielenia z resztą liczb wymiernych i rzeczywistych.

Dzielenie z resztą liczby $a \in \mathcal{K}$ przez liczbę $b \in \mathcal{K}^*$ polega na znalezieniu liczb $c, s \in \mathcal{K}$ takich, że $a = bc + s$ i $0 \leq s < |b|$.

Z przyjętej definicji wynika, że dzielenie z resztą w zbiorze $\mathcal{K}$ jest relacją δ określoną w iloczynie kartezjańskim $(\mathcal{K} \times \mathcal{K}^*) \times (\mathcal{K} \times \mathcal{K}_0^+)$ następująco:

$$(a, b)\, \delta\, (c, s) \Longleftrightarrow (a = bc + s \wedge 0 \leq s < |b|) \tag{7}$$

dla $(a, b) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}^*$ i $(c, s) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}_0^+$.

Zauważmy, że dla dowolnej pary liczb $(a, b) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^*$ istnieje nieskończenie wiele par liczb $(c, s) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}_0^+$ takich, że $(a, b)\, \delta\, (c, s)$. Istotnie, niech s będzie dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą taką, że $0 \leq s < |b|$. Wówczas wystarczy przyjąć $c = \frac{a-s}{b}$. Wtedy $bc + s = b \cdot \frac{a-s}{b} + s = a$, a więc $(a, b)\, \delta\, (c, s)$. Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla liczb wymiernych.

Wobec tego relacja δ określona wzorem (7) nie jest funkcją. Natomiast relacja (7) ograniczona do zbioru $(\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^*) \times (\mathcal{Z} \times \mathcal{N})$ lub $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}^*) \times (\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ jest funkcją określoną odpowiednio wzorami (6) lub (2).

5. Zakończenie

Na zakończenie dodam, że przedstawione w tym artykule zagadnienia mogą być podstawą do opracowań dydaktycznych *sensu stricto*, dotyczących dzielenia z resztą liczb w szkolnym programie z matematyki. Artykuł może być również wykorzystany w procesie kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki.

References

Abramowicz, T.: 1978, Głos w dyskusji w sprawie symbolu dzielenia z resztą, *Matematyka* **6**, 338 – 339.

Babiański, W., Chańko, L., Wej, K.: 2019, *Matematyka 1. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Nowa Era, Warszawa.

Chronowski, A.: 1999, *Podstawy arytmetyki szkolnej. Liczby naturalne i całkowite,* cz. 1, Wydawnictwo Kleks, Bielsko-Biała.

Dobrowolska, M., Jucewicz, M., Karpiński, M., P., Z.: 2018, *Matematyka 5 z plusem. Podręcznik do klasy piątej szkoły podstawowej*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk.

Dobrowolska, M., Jucewicz, M., Karpiński, M., Zarzycki, P.: 2019, *Matematyka 4 z plusem. Podręcznik do klasy czwartej szkoły podstawowej*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk.

Dubieniecka-Kruk, B., Piskorski, P., Gleirscher, A., Malicka, E., Pytlak.: 2017, *Matematyka 4. Podręcznik*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki,* cz. 1, WSiP, Warszawa.

Krygowska, Z., Siwek, H.: 1976, Pojęcie ilorazu. dzielenie z resztą, *Oświata i Wychowanie* **7**. wkładka: Studium Nauczania Początkowego Matematyki NURT.

Kurczab, M., E., K., Świda, E.: 2019, *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników klasa 1. Zakres rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna, Krzysztof Pazdro Sp. z o. o., Warszawa.

Nowecki, B., Klakla, M.: 1997, *Matematyka. Podręcznik dla klasy piątej szkoły podstawowej*, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała.

Nowecki, B., Klakla, M.: 1999, *Matematyka. Podręcznik dla klasy piątej szkoły podstawowej*, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała.

Semadeni, Z..: 1978, O symbolu dzielenia z resztą.

Turnau, S., Ciosek, M., Legutko, M.: 1979, *Matematyka 4*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Zalewska, A.: 2017, Rozporządzenie ministra edukacji narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły i stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej, *Dziennik Ustaw Rzeczypospolitej Polskiej, Poz.*, 356, Warszawa.

Zalewska, A.: 2018, Rozporządzenie ministra edukacji narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły ii stopnia, *Dziennik Ustaw Rzeczypospolitej Polskiej, Poz.*, 467, Warszawa.

Kraków
e-mail: antoni.chronowski@interia.pl